

© Группа авторов, 2000

Математическое моделирование нагруженности коленного сустава и прогнозирование результата оперативного лечения

А.С. Денисов, Н.М. Белокрылов, В.М. Тверье

Mathematical modelling of the knee loading and prediction of surgical treatment results

A.S. Denisov, N.M. Belokrylov, V.M. Tveriet

Пермская государственная медицинская академия

Разработана математическая модель нагруженности коленного сустава с учетом геометрических размеров контактных взаимодействий, рассчитываемых по рентгенограммам. Исследования позволяют оценить состояние костных структур и дать объективный прогноз результата оперативного лечения.

Ключевые слова: коленный сустав, математическая модель, биомеханическая коррекция, прогнозирование результата.

A mathematical model of the knee loading is developed taking into consideration geometrical dimensions of contact interactions, calculated by x-rays. The studies allow to assess status of bone structures and predict results of surgical treatment objectively.

Keywords: the knee, mathematical model, biomechanical correction, result prediction.

Кафедрой травматологии, ортопедии и военно-полевой хирургии Пермской государственной медицинской академии совместно с кафедрой теоретической механики Пермского политехнического университета с целью оценки состояния костных структур, изучения нагруженности коленного сустава, прогнозирования результатов оперативного лечения разработана математическая модель коленного сустава. Математическая часть решалась по серии рентгенограмм путем моделирования контактных нагрузок.

Мы исходили из того, что физиологическое вальгусное отклонение голени составляет 6-8° (Д.В. Скворцов, 1996). Изменение этого угла в ту или другую сторону приводит к повышенному уровню напряжений в хрящевых образованиях и трансформируется в дистрофические изменения суставных отделов костных структур (P.G. Maquet, G.A. Peitzer, 1977; M.A.R. Freeman, 1980). Принципиально хирургическая коррекция заключается в вырачивании костного регенерата при остеотомии проксимального отдела голени и перемещении костных фрагментов в необходимом направлении (W.R. Harris and J.P. Kostuik, 1970; R. Mynerts, 1980; Г.А. Илизаров, 1982).

Объективизация степени хирургической коррекции оси нижней конечности требовала построения математической модели контактного взаимодействия в коленном суставе, что могло быть осуществлено при изучении механики деформированного твердого тела (Л.А. Галин, 1980; К.А. Джонсон, 1989). При работе структуры в упругой зоне зависимость между внешней силой и вызванным ею перемещением оказывается нелинейной, а область контакта заранее не известна. Для указанных областей характерно возникновение всесторонних сжимающих напряжений, что позволяет структуре выдерживать достаточно высокие воздействия. С учетом деформации контактирующих тел, сил трения, наличия дополнительных контактирующих тел (например, менисков), решение задачи механики деформирующего твердого тела возможно с помощью численных методов при упрощающих предположениях.

Рассмотрено взаимодействие бедренной и большеберцовой костей, без учета малоберцовой, так как она не оказывает существенного влияния на взаимодействие в коленном суставе при статической нагрузке (R. Chand, E. Haug, K. Rim, 1976). Упругие свойства губчатой костной ткани, описываемые модулем Юнга

$E = 500 \text{ Мпа}$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,36$ (I. Heegard, Leyvraz, A. Curnier и др., 1995), во много раз превосходят упругие свойства менисков и хрящевой ткани ($E = 6\text{--}12 \text{ Мпа}$, $\nu = 0,43$), поэтому мы допустили, что бедренная и большеберцовая кости – абсолютно твердые тела (рис. 1), между которыми находится упругий слой Винклера, представляющий собой не взаимодействующие друг с другом «пружины», передающие только нормальную контактную нагрузку $q = q(x, y)$ (Л.А. Галин, 1980; К.А. Джонсон, 1989), распределенную в области контакта протяженностью $a = a_L + a_m$, где a_L , a_m – длина области контакта в латеральном и медиальном мышцах бедренной кости.

При варусной или вальгусной деформации разность углов определяется следующим образом. При варусной деформации разность углов $\theta_2 - \theta_1 > 0$ задает угол варуса при $\theta_2 > 90^\circ$, а угол вальгуса равен $\theta_1 - \theta_2$ при $\theta_2 < 90^\circ$ и $\theta_1 > 90^\circ$. Если полагать, что большеберцовая кость неподвижна, и рассматривать перемещение и деформацию на упругом основании бедренной кости, к которой вертикально приложен вес тела человека P , усилие натяжения малоберцовой коллатеральной связки P_L и усилие натяжения большеберцовой коллатеральной связки P_M , P_L , P_M составляют 10% от P в зависимости от углов варуса или вальгуса (по данным работы R.J. Minns, 1981).

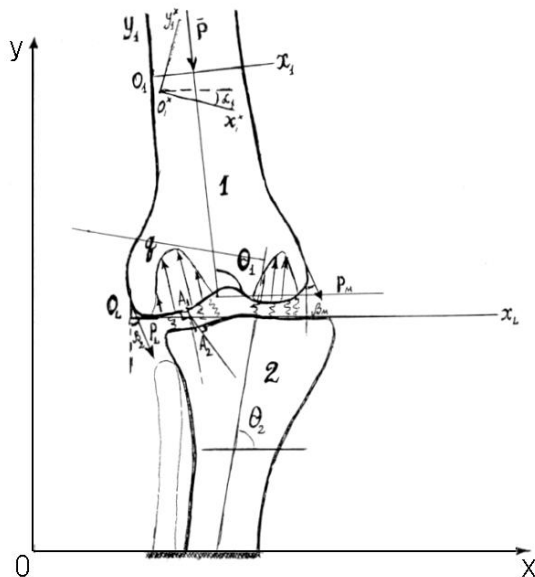


Рис. 1. Плоскостное фронтальное изображение коленного сустава и принципиальная схема к постановке задачи. X_L – X – координата площадок контакта во фронтальной плоскости, отсчитываемая от точки прикрепления малоберцовой (либо большеберцовой) коллатеральной связки. Буквенные и цифровые символы пояснены в тексте

Под действием внешних сил произойдет перемещение бедренной кости (тело 1) относительно общей системы координат XOY на величину Δ_1 , компенсируемое перемещением в зонах

контакта. Силы трения в зонах контакта не учитывали.

Математическое выражение равновесия в рассматриваемой задаче можно представить в виде уравнений:

$$\sum_{m=1}^3 P_{M_x} = S \int_{Y_{1a}}^{Y_{1b}} q(x, y) dy \quad (1);$$

$$\sum_{m=1}^3 P_{M_y} = S \int_{X_{1a}}^{X_{1b}} q(x, y) dx;$$

$$\sum_{m=1}^3 M_{O_1}(P_m) = S \int_{X_{1a}}^{X_{1b}} q(x, y) x dx + S \int_{Y_{1a}}^{Y_{1b}} q(x, y) y dy,$$

где P_{M_x} , P_{M_y} – проекции на оси X и Y соответственно сил P , P_L , P_M ; $q(x, y)$ – контактные давления, S – ширина тела (размер по оси z); X_{1a} , Y_{1a} – координаты начала площадки контакта в системе осей $X_1O_1Y_1$, жестко связанных с телом; X_{1b} , Y_{1b} – то же для конца зоны контакта.

В зоне первоначального контакта деформируются близлежащие участки слоя. В результате точки тела 1 переместятся относительно местных осей $X^*O^*Y^*$ на величины U_x и U_y и займут новые положения. Положения точек A_2 , соответственно точкам A_1 будем находить, проводя биссектрису угла, образованного нормальными к суставным сочленяющимся поверхностям бедренной и большеберцовой костей. Принимая во внимание условие касания точек и связь между системами координат, получим кинематические соотношения для контактирующих тел

$$Y(A_1) - y(A_2) = \Delta_{1Y} + U_y \cos \alpha_1 + U_x \sin \alpha_1; \quad (2)$$

$$X(A_1) - x(A_2) = \Delta_{1X} - U_y \sin \alpha_1 + U_x \cos \alpha_1,$$

где $y(A_i)$, $x(A_i)$ ($i = 1, 2$) – координаты точек тел в ненагруженном состоянии, определяемые по рентгенограмме сустава.

Уравнения (2) выполняются для всех сопряженных контактирующих точек тел на обеих площадках контакта.

Определяющее соотношение для упругого слоя Винклера имеет вид

$$q(x, y) = \frac{K}{h(x, y)} |U_n| \quad (3),$$

где K – модуль упругости слоя хряща и менисков; $h(x, y)$ – толщина упругого слоя, U_n – перемещение слоя по нормали к контактным площадкам бедренной кости.

Таким образом, для определения распределения контактного давления и самих площадок контакта необходимо решить систему уравнений 1-3, для чего используется следующая численная процедура. Незвестную функцию распределения контактных давлений будем аппроксимировать ступенчатым законом с постоянными или давлениями в зоне j -ой точки контакта. Запи-

сывая уравнение (2) для всех точек контакта и заменяя входящие в них смещения соотношениями (3) с учетом уравнений равновесия (1), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных давлений, перемещений и размеров зон контакта. Эта система решается по методу последовательных приближений для определения действительных размеров площадок контакта из условия отсутствия растягивающих усилий.

Моделирование применяется следующим образом. По рентгенограмме определяют геометрические размеры, контуры костной основы изображают в виде скиаграмм для математического анализа контактных давлений. Моделируются ситуации результатов остеотомий согласно планируемым формам и уровню сечения кости. Метод позволяет выбрать сегмент для остеотомии. На рисунке 2 показаны результаты расчетов контактного давления в коленном суставе больной О. до (кривые 1) и после (кривые 2) исправления оси нижней конечности при вальгусной деформации в 17° (до 6° физиологического вальгуса).

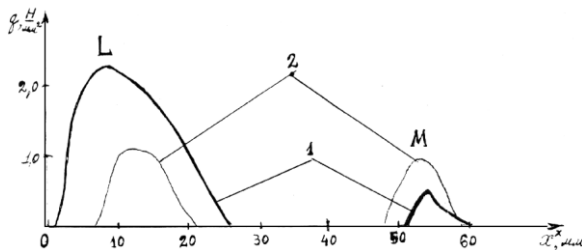


Рис. 2 Больная О.: контактное давление в коленном суставе (1 – до операции; 2 – после операции). L – латеральный контакт, M – медиальный контакт

В данном случае выбор сделан в пользу более щадящей остеотомии в надбугорковой зоне большеберцовой кости, а не на уровне бедра, как предлагает большинство авторов в подобных ситуациях.

При выраженной вальгусной деформации наблюдается значительная перегрузка латерального мышечка бедренной и большеберцовой костей. Из-за децентрации осей голени и бедра в латеральном отделе сустава ширина площадки контакта в 2,5 раза больше, чем в медиальном,

при четырехкратном превышении уровня давлений. Проведенное оперативное вмешательство обеспечило выравнивание как размеров площадок контакта, так и уровня контактных давлений, что позволяет сделать благоприятный прогноз состояния тканей коленного сустава, исходя из их равномерной нагруженности (T.S. Hernborg and B.O. Nilsson, 1977).

Аналогичная система расчетов применяется при варусной деформации. Такой подход позволяет выявить пограничные угловые величины, при отклонении от которых неравномерная нагруженность мышечков приводит к перегрузке одного из них.

Созданная математическая модель дает возможность выбрать оптимальный вариант остеотомии по уровню, направлению и величине коррекции.

Разработка стандартных ситуаций на математической модели позволила биомеханически правильно планировать костную коррекцию по поводу варусных и вальгусных деформаций коленного сустава у 68 взрослых и 34-х детей, оперированных в 1986-1998 годах. Отличные и хорошие результаты получены у взрослых в 97%, у детей – в 100% случаев. Неудовлетворительных результатов не было. Во всех случаях проводилась динамическая коррекция деформации с использованием аппарата Г.А. Илизарова. В 95% случаев проводилось формирование клиновидных регенератов различной величины. Биологическое действие дистракционных костных регенератов усиливало положительный эффект правильно спланированных на математической модели операций.

Мы понимаем, что модель не позволяет учитывать взаимодействие структур сустава в нескольких плоскостях, оценить величину гидродинамического трения, деформируемость костных структур и мышечно-связочного аппарата. Это, вероятно, будет изучено при последующих исследованиях.

Тем не менее, математическое моделирование позволяет прогнозировать результат исправления биомеханической коррекции коленного сустава.

Рукопись поступила 10.06.2000.